Conteúdo programático:

Elementos armazenadores de energia: capacitores e indutores. Revisão de características técnicas e relações V x I. Caracterização de regime permanente.

Caracterização temporal de circuitos: análise de transientes e regime permanente. Condições iniciais e finais e resolução de exercícios.

Rearranjo de cargas em indutores e capacitores.

Fontes variáveis ao longo do tempo.

Resposta completa de circuitos de primeira ordem.

Resposta completa de circuitos de segunda ordem.

Notas de aula e exercícios:

1. Apresentação do Tópico

Elementos armazenadores de energia respondem de forma lenta as variações do circuito, pois precisam de tempo para acumular essa energia enquanto a fonte estiver alimentando o circuito, e precisam de tempo para devolver essa energia quando a fonte estiver desligada. Dessa forma, a análise de circuitos com elementos armazenadores de energia deverá ser feita observando o instante de tempo em que ela é válida.

Os dois tipos de elementos com esta característica são os capacitores e os indutores. Cada um deles, porém, armazena energia de forma diferente (dual), e, portanto, o comportamento do circuito não é o mesmo.

2. Capacitores

Capacitores são dispositivos que armazenam carga elétrica. Fisicamente construídos através de duas placas condutoras separadas por um material dielétrico, a carga elétrica armazenada em uma das placas do capacitor faz surgir uma diferença de tensão elétrica entre as duas placas (ou entre os dois terminais, visto que cada terminal está conectado a uma das placas). A tensão V (em Volts) é proporcional a carga Q armazenada (em Coulombs) e inversamente proporcional a capacitância C (em Farads), ou seja, $V = \frac{Q}{C}$.

Como a corrente é definida pela variação de cargas ao longo do tempo, a corrente que passa por um capacitor, entrando pelo seu terminal positivo, será dada por: $i = C\frac{dV}{dt}$.

Por exemplo, considere um capacitor C descarregado (ou seja, com uma tensão constante de 0 V entre seus terminais) para o tempo anterior ao t = 0, e que está sendo carregado linearmente entre 0 ≤ t ≤ ⅟a, resultando em uma tensão constante de 1 V após esse intervalo (ou seja, a função que descreve a tensão em função do tempo no intervalo de carga é V = a*t). Qual o comportamento da corrente neste capacitor?

Ver exemplo 7.1 e exercício 7.1.3 de Johnson (pg. 135 até 137).

Como pode ser visto nos exemplos acima, quando a tensão sobre o capacitor se mantém constante (ou seja, quando um circuito CC atinge o regime permanente), a corrente que passa por esse capacitor é zero (a derivada de uma constante). Ou seja, **para regime permanente (RP), o capacitor se comporta como um circuito aberto**.

A energia armazenada em um capacitor será dada pelo produto entre a tensão e a corrente, integrado ao longo do tempo. Aplicando a equação que define a corrente em função da tensão e a equação que define a tensão em função da carga elétrica armazenada, obtemos que:

$$W_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

Observe que, para um capacitor ideal, não existem perdas. Dessa forma, toda a energia acumulada será devolvida para o circuito em algum momento.

2.a Associação de capacitores

Capacitores associados em série apresentarão uma capacitância equivalente igual ao inverso da soma dos inversos das capacitâncias originais. Ao associarmos capacitores em série, a carga armazenada em cada um deles será idêntica, e será a mesma carga armazenada pelo circuito como um todo.

Capacitores associados em paralelo apresentarão uma capacitância equivalente a soma das capacitâncias originais. Ao associarmos capacitores em paralelo, cada capacitor armazenará uma carga individual, e a carga armazenada pelo circuito será o somatório das cargas armazenadas.

Ver Johnson, páginas 139 e 140.

Exercícios feitos em aula: 7.3.2 e 7.3.4 (pg. 141 do Johnson).

Exercícios complementares: 7.16, 7.17 e 7.18 (pg. 157 e 158 do Johnson), exercícios resolvidos 8.8 até 8.14 de O'Malley (pgs. 248 até 251) e exercícios suplementares 8.43 até 8.48 de O'Malley (pgs. 265 até 266).

3. Indutores

Indutores são dispositivos que armazenam fluxo magnético. Fisicamente construídos através de espiras de um material condutor, a corrente elétrica que passa por estas espiras força o aparecimento de um fluxo magnético, que tende a manter a corrente elétrica constante. A corrente I (em Amperes) é proporcional ao fluxo λ gerado (em Weber) e inversamente proporcional a indutância L (em henry), ou seja, $I = \frac{\lambda}{L}$.

Análogo ao que acontece com os capacitores, a variação de fluxo ao longo do tempo faz surgir uma tensão sobre os terminais do indutor, portanto $V = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$.

Por exemplo, considere um indutor L através do qual, para o tempo anterior ao t = 0, passa uma corrente constante de 1 A. A partir desse instante, considere que a corrente irá diminuir linearmente até o instante de tempo t = ⅟a, resultando em uma corrente nula após esse intervalo (ou seja, a função que descreve a corrente em função do tempo no intervalo de desligamento é I = 1 – a*t). Qual o comportamento da tensão neste indutor?

Ver exemplo 7.5 e exercício 7.4.3 de Johnson (pg. 143 e 144).

Como pode ser visto nos exemplos acima, quando a corrente sobre o indutor se mantém constante (ou seja, quando um circuito CC atinge o regime permanente), a tensão é zero (a derivada de uma constante). Ou seja, **para regime permanente (RP), o indutor se comporta como um curto-circuito**.

A energia armazenada em um indutor será dada pelo produto entre a tensão e a corrente, integrado ao longo do tempo. Aplicando a equação que define a tensão em função da corrente, obtemos que:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Observe que, para um indutor ideal, não existem perdas. Dessa forma, toda a energia acumulada será devolvida para o circuito em algum momento.

3.a Associação de indutores

Indutores associados em paralelo apresentarão uma indutância equivalente igual ao inverso da soma dos inversos das indutâncias originais. Ao associarmos indutores em paralelo, o mesmo fluxo aparecerá em todos os indutores.

Indutores associados em série apresentarão uma indutância equivalente a soma das indutâncias originais. Ao associarmos indutores em série, o fluxo resultante será igual a soma dos fluxos individuais de cada indutor.

Ver Johnson, páginas 146, 147 e 148.

Exercícios complementares: 7.6.2, 7.6.3 e 7.6.4 (pg. 148), 7.29, 7.30 e 7.31 (pg. 159 do Johnson), exercícios resolvidos 9.12 até 9.14 de O'Malley (pgs. 284 e 285) e exercícios suplementares 9.42 até 9.43 de O'Malley (pg. 299).

4. Caracterização temporal de circuitos

Definimos eventos em circuitos como mudanças bruscas de comportamento (por exemplo, quando uma chave muda de posição ou quando uma fonte variável muda de comportamento).

Circuitos resistivos reagem instantaneamente aos eventos, ajustando-se às novas características de forma imediata.

Porém, circuitos com elementos armazenadores de carga (capacitores e/ou indutores) reagem lentamente às mudanças, gerando um período de resposta transiente (na qual o sistema está se adaptando da condição inicial para a condição final) antes de atingir o chamado regime permanente.

Regime permanente então é a condição estável do circuito após a adaptação ao evento. Considerando um evento do tipo mudança no estado de uma chave em um circuito alimentado por fontes CC, o regime permanente será um valor constante de tensão e corrente em cada elemento do circuito, normalmente diferente do valor inicial (condição de regime permanente antes do evento).

Como a característica de resposta de um circuito RLC é assintótica (ou seja, tende ao valor de regime no infinito), assumimos para todos os efeitos práticos que quando o valor da grandeza ultrapassa 99,3% do valor de regime (ou seja, quando o tempo de ciclo ultrapassa 5 constantes de tempo do circuito), a grandeza será definida como em regime permanente.

A constante de tempo do circuito é uma grandeza que caracteriza o tempo de resposta do circuito, e que é dependente dos valores dos componentes R, L e C utilizados. O cálculo desta constante será objeto de estudo nas próximas aulas, e não será abordado neste documento.

Com relação à análise de regime permanente, as principais regras já foram listadas, ou seja, capacitores são analisados como circuitos abertos e indutores como curto circuitos. Dessa forma, o restante do circuito irá definir os valores de tensão (no capacitor) e de corrente (no indutor) para a condição de regime permanente.

Para análise de condição inicial, imediatamente após a ocorrência do evento (em t_0^+), o capacitor poderá ser analisado como uma fonte de tensão, e o indutor como uma fonte de corrente.

Exercícios 7.7.1, 7.7.2, 7.7.3 (Johnson, pg. 150), 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.24, 7.25, 7.26, 7.27, 7.28, 7.32, 7.33, 7.34, 7.35 e 7.36 (Johnson, pg. 157 até 160), 8.59 e 8.60 (O'Malley, pg. 268 e 269), 9.51 e 9.52 (O'Malley, pg. 300 e 301).

5. Rearranjo de cargas

Tecnicamente falando, rearranjo de cargas é uma expressão que poderia ser usada apenas em circuitos capacitivos, pois capacitores armazenam carga elétrica. Em circuitos indutivos analisaremos o rearranjo de fluxos.

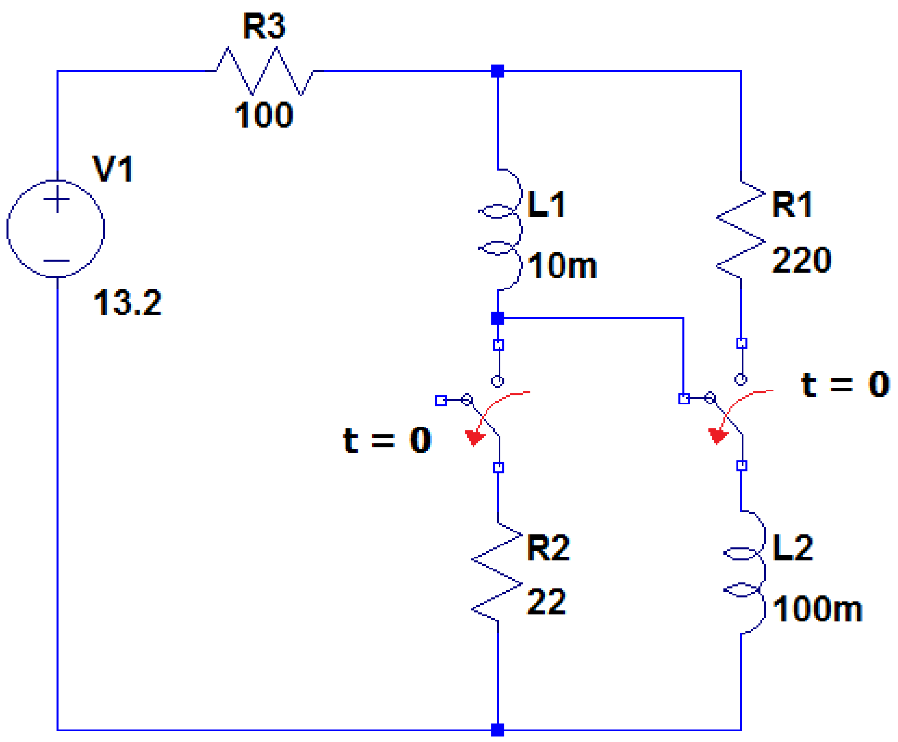
Este fenômeno ocorre quando dois elementos (por exemplo, dois capacitores) com energia armazenada são instantaneamente conectados. Nesse caso, a carga total do circuito (ou o fluxo total se for um circuito indutivo) se mantém, e parte da energia armazenada será irradiada (apesar deste fenômeno não estar previsto na modelagem original dos elementos).

Exemplos desse fenômeno podem ser observados em Johnson (exemplo 7.11 e 7.12, pg. 153 até 156) e em O'Malley (exercícios resolvidos 8.15, 8.16 e 8.17, pg. 252).

Exercícios:

5.1 Um capacitor de 0,1 μF carregado com 60 V é instantaneamente conectado, unindo-se as placas de mesma polaridade, a um capacitor de 0,2 μF, carregado com 100 V. Qual a tensão final resultante a qual a quantidade de energia irradiada neste evento?

5.2 O circuito da figura abaixo estava em regime permanente em $t = 0^-$, imediatamente antes da mudança de posição das chaves. Qual será o valor da corrente i que passa pelo resistor R3 em $t=0^+$ e qual a quantidade de energia irradiada nesta operação?



6. Fontes variáveis ao longo do tempo

Até aqui, estudamos o comportamento de circuitos reativos a partir do instante de tempo t = 0 de ocorrência de um evento específico, caracterizado pelo acionamento de uma chave. Contudo, estes eventos não são os únicos que alteram o comportamento de um circuito. Também a mudança de comportamento de fontes variáveis ao longo do tempo pode gerar um evento a ser analisado.

Em especial para esta disciplina analisaremos fontes do tipo Degrau Unitário e fontes combinadas a partir desta.

Uma fonte do tipo Degrau Unitário é representada pela letra U(t), e apresenta uma definição de comportamento com uma descontinuidade no instante t = 0: para t < 0, a fonte possui valor 0; enquanto para t > 0 a fonte possui valor 1. Essa descontinuidade é o que caracteriza o evento a ser analisado.

Por exemplo, se um circuito série possui uma única fonte de tensão V, tal que V = U(t), sabemos que para qualquer instante de tempo anterior ao tempo t = 0 o valor dessa fonte era zero, e que para qualquer instante de tempo posterior ao tempo t = 0 essa fonte possui o valor um. Podemos representar essa mesma fonte com o uso de chaves acionadas no instante de tempo t = 0, porém o entendimento do modelo matemático dessa fonte nos permite uma simplificação e uma generalização de sinais mais complexos.

Exercícios:

6.1 Desenhe um gráfico de tensão x tempo para uma fonte V = 5 * U (t).

6.2 Desenhe um gráfico de tensão x tempo para uma fonte V = U (t – 1).

6.3 Desenhe um gráfico de corrente x tempo para uma fonte de corrente I = U (t) – U (t – 1).

6.4 Desenhe um gráfico de corrente x tempo para uma fonte de corrente I = t * (U (t) – U (t – 1)).

7. Resposta completa em circuitos de primeira ordem

Circuitos de primeira ordem são circuitos em que os elementos reativos podem ser simplificados a um único elemento na malha, seja por intermédio de associações, seja por isolamento completo entre as malhas.

Ao analisarmos estes circuitos através dos métodos tradicionais (análise de nós e/ou análise de malhas), obtemos uma equação característica no formato de uma equação diferencial de primeira ordem, cuja resposta padrão apresenta um formato de equação exponencial, como deve ter sido estudado nas disciplinas de cálculo do curso. Para os alunos que desejarem maiores explicações, o capítulo 8 do livro do Johnson demonstra matematicamente, e passo-a-passo, a análise e a solução de circuitos de primeira ordem através de equações diferenciais.

Essa solução matemática passa por duas etapas: a resposta natural e a resposta forçada. A resposta natural depende unicamente da natureza do circuito. Para um circuito de primeira ordem a resposta natural sempre terá o formato: $A \times e^{-t/\tau}$, onde τ é a constante de tempo do circuito, determinada pelos valores dos componentes.

Por outro lado, a resposta forçada da equação não depende apenas da natureza do circuito, mas principalmente da natureza da excitação. Para uma fonte de excitação constante em um circuito de primeira ordem, a resposta forçada será uma constante de valor B.

A resposta completa então será dada pela soma de uma resposta natural específica (com a determinação da constante A) com a resposta forçada específica (com a determinação da constante B), de tal forma que os valores resultantes da equação em qualquer instante de tempo coincidam com os valores conhecidos do circuito.

Dessa forma, analisaremos os circuitos de primeira ordem através de um método de seis etapas:

a. Identificar as condições iniciais do circuito, ou seja, os valores de tensão nos capacitores ou corrente nos indutores imediatamente após o evento de mudança do circuito;
b. Identificar as condições finais do circuito, ou seja, quais os valores de tensão nos capacitores ou corrente nos indutores quando o circuito estiver em regime permanente;
c. Identificar a resistência equivalente vista pelos terminais do elemento reativo analisado;
d. Calcular a constante de tempo (τ) e montar a equação geral de resposta do circuito para a grandeza estável (tensão do capacitor ou corrente do indutor):
    a. Para circuitos capacitivos, τ = RC. Então, $V_C(t) = A \times e^{-t/RC} + B$;
    b. Para circuitos indutivos, τ = L/R. Então, $I_L(t) = A \times e^{-Rt/L} + B$.
e. Aplicar os valores conhecidos para t = 0+ e t = ∞ para individualizar as constantes A e B;
f. Usar a equação de resposta obtida, transformando o componente analisado em uma fonte (a partir da resposta obtida, capacitores se comportarão como fontes de tensão variáveis no tempo e indutores se comportarão como fontes de corrente) para analisar o restante do circuito, e calcular as grandezas desejadas.

Exercícios:

7.1 Calcule a expressão de v(t) para t ≥ 0 no circuito da figura 1 abaixo.

Resposta: v (t) = (5 + 5 e -5t) V

7.2 Calcule a expressão de v(t) para t ≥ 0 no circuito da figura 2 abaixo.

Resposta: v(t) = (4 + 12,8 e -2t) V

7.3 Calcule a expressão de i(t) para t ≥ 0 no circuito da figura 3 abaixo.

Resposta: i(t) = (1,5 + 0,5 e -2t) mA

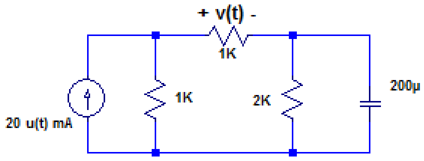


Figura 1

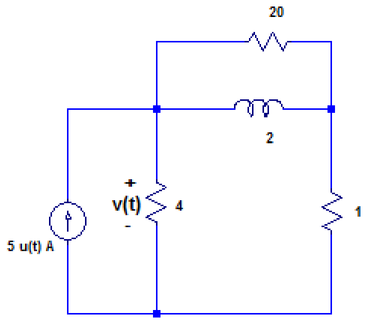


Figura 2

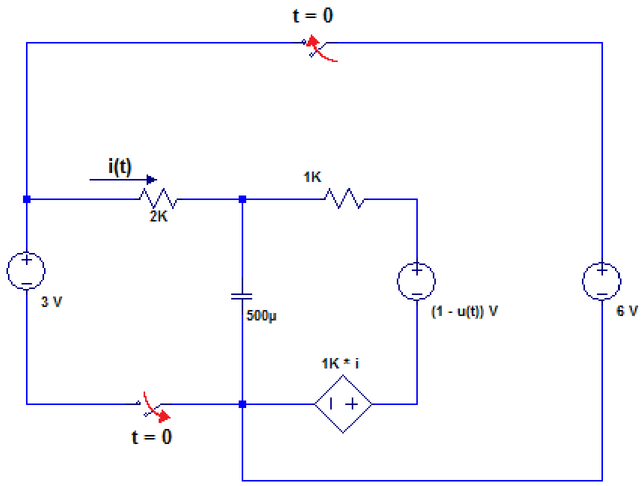


Figura 3

8. Resposta completa em circuitos de segunda ordem

Circuitos de segunda ordem são aqueles circuitos cuja análise resulta em uma equação diferencial de segunda ordem (ou seja, uma equação do tipo $a\frac{d^2f}{dt^2} + b\frac{df}{dt} + c = G(t)$).

Novamente, a solução detalhada de equações diferenciais de segunda ordem pode ser encontrada em livros das disciplinas de cálculo e no Capítulo 9 do livro *Fundamentos de analise de circuitos elétricos (Johnson et al).*

Como regra geral de solução, a resposta natural de uma equação de segunda ordem será obtida através da solução da equação de segundo grau com coeficientes a, b e c. As raízes desta equação serão as possíveis respostas naturais do sistema.

As raízes desta equação podem ser reais e diferentes, reais e iguais ou complexas.

Um sistema cuja equação característica resulte em duas raízes reais diferentes $-s_1$ e $-s_2$, terá como resposta natural $f\,(\,t\,) = \,A_1 \times e^{-s_1 t} + A_2 \times e^{-s_2 t}$.

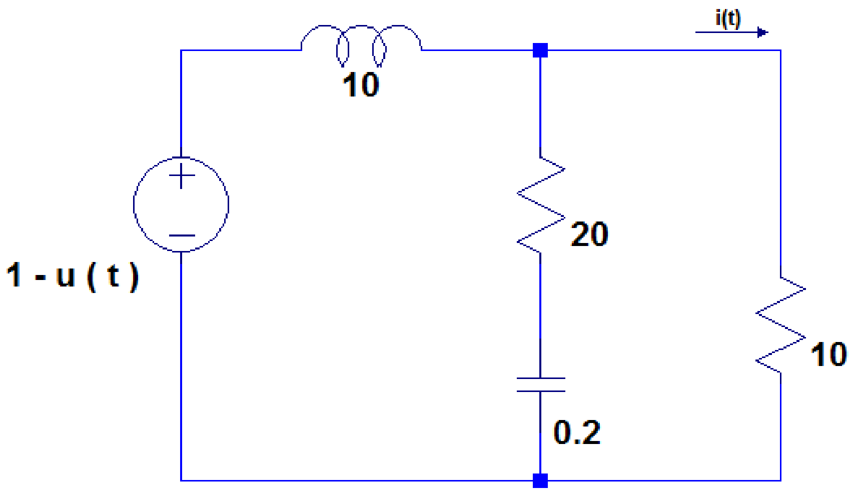
Um sistema cuja equação característica resulte em duas raízes reais e iguais $-s_1$ e $-s_1$, terá como resposta natural $f\,(\,t\,) = \,A_1 \times e^{-s_1 t} + A_2 \times t \times e^{-s_1 t}$.

Um sistema cuja equação característica resulte em duas raízes complexas, $-s_1 \pm j\omega$, terá como resposta natural $f\,(\,t\,) = \,e^{-s_1 t}\,[\,A_1 \times \sin(\omega t) + A_2 \times \cos(\omega t)\,]$.

Da mesma forma que nos sistemas de primeira ordem, a resposta completa será dada pela soma da resposta natural com a resposta forçada, e pela particularização das constantes através da identificação das condições iniciais e finais. Novamente, a resposta forçada depende da função de excitação, e da relação desta com a resposta natural do circuito, tornando-se muito mais complexa neste caso.

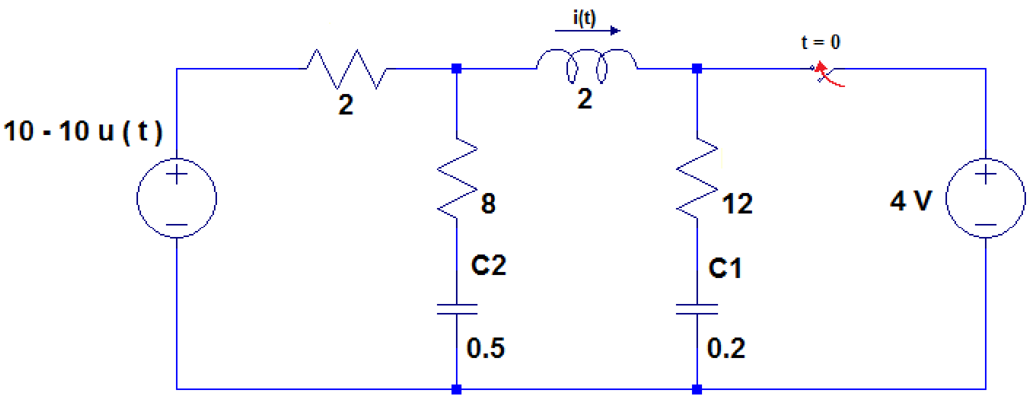
Exercícios:

8.1 Calcule a expressão de i(t) para t ≥ 0 no circuito da figura abaixo.



Resposta: i (t) = (0,2 e –t/2 – 0,1 e –t/3) A

8.2 Calcule as condições iniciais e finais para o circuito da figura abaixo, incluindo a derivada da corrente no indutor e a derivada da tensão em cada um dos capacitores para t = 0+.



Resposta: Vc1(0-) = 10 V, Vc2(0-) = 10 V, IL(0-) = 0 A, dVc1/dt (0+) = -2,5 V/s, dVc2/dt (0+) = -2 V/s, dIL/dt (0+) = -1 A/s, Vc1(∞) = 4 V, Vc2(∞) = 4 V, IL(∞) = -2 A.